Solución

① a) $\sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)a^k$

a) es una serie infinita, converge.

b) Estrategia: Manipulación matemática, aplicar formula.

$\sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)a^k$ * Voy a multiplicar todo, después separo por la resta.

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2a^k - ka^k = \sum_{k=1}^{\infty} k^2a^k - \sum_{k=1}^{\infty} ka^k$$

Elimino el termino $k=0$, el cual es $\emptyset$ para este caso.

$$\left[\sum_{k=0}^{\infty} k^2a^k - 0^2a^0\right] - \left[\sum_{k=0}^{\infty} ka^k - 0a^0\right] =$$

$$\frac{a(a+1)}{(1-a)^3} - 0 - \frac{a}{(1-a)^2} + 0 = \frac{a(a+1)}{(1-a)^3} - \frac{a}{(1-a)^2}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)a^k = \frac{a(a+1)-a(1-a)}{(1-a)^3} = \frac{a^2+a-a+a^2}{(1-a)^3} = \frac{2a^2}{(1-a)^3}$$

b) $a = \frac{1}{3}$, $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k$

a) serie geométrica, converge.

b) esa a, debe ser a para sustituir en la forma cerrada

c) Estrategia: usar Fórmula.

$$\sum_{K=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^K = \frac{1}{1-a} = \frac{1}{1-1/3} = \underline{\underline{\frac{3}{2}}}$$

a) $a = \frac{1}{2}$, $\sum_{K=0}^{\infty} \frac{K}{2^K}$

a) serie converge.

b) a debe ser la a para sustituir en la forma cerrada.

c) Estrategia: Manipular la serie, aplicar formula

$$\sum_{K=0}^{\infty} \frac{K}{2^K} = \sum_{K=0}^{\infty} K\left(\frac{1}{2^K}\right) = \sum_{K=0}^{\infty} K\left(\frac{1}{2}\right)^K = \frac{a}{(1-a)^2}$$

$$= \frac{1/2}{(1-1/2)} = \underline{\underline{2}}$$

d) $\sum_{\rho=m}^{\infty} \rho\alpha^{\rho}(\alpha^2+1)$

a) la serie converge si $|\alpha| < 1$,

b) la serie empieza en m, T_T

c) Estrategia: Cambio de variable, manipulación, aplicar fórmula

$$\sum_{\rho=m}^{\infty} \rho\alpha^{\rho}(\alpha^2+1) = \sum_{K=0}^{\infty} (K+m)\alpha^{K+m}(\alpha^2+1)$$

$K=0$
$\rho-m=0$
$\rho-m=K$
$\rho=K+m$

$$(\alpha^2+1)\sum_{k=0}^{\infty}(k+m)\alpha^k\alpha^m = (\alpha^2+1)\alpha^m\sum_{k=0}^{\infty}k\alpha^k + m\alpha^k =$$

$$(\alpha^2+1)\alpha^m\left(\sum_{k=0}^{\infty}k\alpha^k + m\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^k\right) = (\alpha^2+1)\alpha^m\left(\left(\frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}\right)+m\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)\right)$$

$$\sum_{=m}^{\infty}p\alpha^p(\alpha^2+1) = \frac{\alpha^m(\alpha^2+1)\ (m(1-\alpha)+\alpha)}{(1-\alpha)^2}$$

2) Usando una serie geometrica prueba que $0.3\bar{3} = 1/3$

a) T_T, Estrategia: Convertir $0.3\bar{3}$ en serie, aplicar fórmula.

$$0.33\bar{3} = \frac{1}{3}$$

$$0.3 + 0.03 + 0.003 + \ldots = \frac{1}{3}$$

$$\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \ldots = \frac{1}{3}$$

$$3\left(\frac{1}{10}\right) + 3\left(\frac{1}{10^2}\right) + 3\left(\frac{1}{10^3}\right) + \ldots = \frac{1}{3}$$

$$3\left(\frac{1}{10}\right)^1 + 3\left(\frac{1}{10}\right)^2 + 3\left(\frac{1}{10}\right)^3 + \ldots = \frac{1}{3}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}3\left(\frac{1}{10}\right)^k - 3\left(\frac{1}{10}\right)^0 = 3\left(\frac{1}{1-1/10}\right) - 3 = \frac{1}{3}$$

$$\left(\frac{3}{1}\cdot\frac{10}{9}\right) - \frac{27}{9} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{3}{9} = \frac{1}{3} \qquad \text{QED} \ //$$

3) Usando una serie geométrica demuestra $0.9\bar{9} = 1$

a) T_T, se parece al 2. Estrategia, la misma.

$0.99\bar{9} = 1$

$0.9 + 0.09 + 0.009 + \ldots = 1$

$$\frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \ldots = 1$$

$$9\left(\frac{1}{10}\right) + 9\left(\frac{1}{100}\right) + 9\left(\frac{1}{1000}\right) + \ldots = 1$$

$$9\left(\frac{1}{10}\right) + 9\left(\frac{1}{10^2}\right) + 9\left(\frac{1}{10^3}\right) + \ldots = 1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} 9\left(\frac{1}{10}\right)^k = 1$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} 9\left(\frac{1}{10}\right)^k - 9\left(\frac{1}{10}\right)^0 = 1$$

$$9\left(\frac{1}{1 - 1/10}\right) - 9 = 1$$

$$\left(\frac{9}{1} \cdot \frac{10}{9}\right) - \frac{81}{9} = 1$$

$$\frac{9}{9} = 1 \quad \text{QED}$$

4) obten las formas cerradas de:

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k(k+1)} \text{ y } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$$

a) T_T, No es de los del formulario.

b) Estrategia: tomar el tip, expandir para la de N

Sacar el limite a la de n para obtener la de ∞

$$\sum_{K=1}^{N} \frac{1}{K(K+1)} = \sum_{K=1}^{N} \frac{1}{K} - \frac{1}{K+1} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{(1+1)}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots$$

$$= \left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \cdots + \left(\cancel{\frac{1}{N-1}} - \cancel{\frac{1}{N}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{N}} - \frac{1}{N+1}\right)$$

$$= \frac{1}{1} - \frac{1}{N+1} = \frac{N+1-1}{N+1} = \underline{\underline{\frac{N}{N+1}}}$$

$$\sum_{K=1}^{\infty} \frac{1}{K(K+1)} = \lim_{N \to \infty} \left\{ \frac{N}{N+1} \right\} = \frac{\infty}{\infty} \quad !!$$

el L'Hopital

$$\lim_{N \to \infty} \left\{ \frac{1}{1+0} \right\} = \underline{\underline{1}}$$