Solución

① $\sum_{k=20}^{n} x$ ⇒ a) Esta serie converge, porque es finita

b) - Nota que la serie varía en K, no en X.
- Nota que la serie comienza en 20, no en 1 o en Ø

c) Estrategia: Restar lo que sobra a la serie completa. El término Ø no aporta nada

$$\sum_{k=20}^{n} x = \sum_{k=1}^{n} x - \sum_{k=1}^{19} = nx - 19x = x(n-19)$$

② $\sum_{i=15}^{\infty} i a^{i}$ ⇒ a) Converge solo si $|a| < 1$

b) - No empieza en Ø
- Es infinita
- Es una serie geométrica

c) Estrategia: Cambio de variable y sustitución.

$$\sum_{i=15}^{\infty} i a^{i} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+15)\, a^{k+15}$$ sustituimos las i por K.

Recorremos para que inicie en Ø o bien:
$k=0 \quad 0=i-15$

- Despejamos para poder sustituir.
$K = i-15$
$i = K+15$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (K+15)\, a^{K+15} = \sum_{k=0}^{\infty} K a^{K+15} + \sum_{k=0}^{\infty} 15 a^{K+15}$$

$$= a^{15}\sum_{K=0}^{\infty} Ka^K + 15a^{15}\sum_{K=0}^{\infty} a^K$$

$$= a^{15}\left(\frac{a}{(1-a)^2}\right) + 15a^{15}\left(\frac{1}{(1-a)}\right)$$

$$= \frac{a^{16}}{(1-a)^2} + \frac{15a^{15}}{(1-a)}$$

③ $\sum_{j=5}^{n} (25-x)^j$ ⟹ a) Esta serie converge porque es finita

b) - No empieza en $\emptyset$ o 1

- $25-x$ es un valor constante

c) Estrategia: se realiza por cambio de variable y una sustitución.

$$\sum_{j=5}^{n} (25-x)^j = \sum_{K=0}^{n-5} (25-x)^{K+5} = \sum_{K=0}^{n-5} a^{K+5}$$

$$= \sum_{K=0}^{n-5} a^K a^5 = a^5 \sum_{K=0}^{n-5} a^K = a^5\left(\frac{1-a^{n-5+1}}{(1-a)}\right)$$

$$= \frac{a^5 - a^{n-5+1+5}}{(1-a)} = \frac{a^5 - a^{n+1}}{(1-a)}$$

$$= \frac{(25-x)^5 - (25-x)^{n+1}}{1-(25-x)} = \frac{(25-x)^5 - (25-x)^{n+1}}{x-24}$$

④ $\sum_{K=3}^{\infty} a^K$ ⟹ a) Esta serie converge si $|a| < 1$

b) - Es una serie infinita

- Comienza en 3

c) Estrategia: cambio de variable.

$$\sum_{k=3}^{\infty} a^k = \sum_{j=0}^{\infty} a^{j+3} = \sum_{j=0}^{\infty} a^j a^3 = a^3 \sum_{j=0}^{\infty} a^j = a^3\left(\frac{1}{1-a}\right)$$

$$= \frac{a^3}{(1-a)}$$

⑤ $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \frac{3}{2^j} \Rightarrow$

a) Esta serie converge.

b) - la variable j esta en el denominador

c) Estrategia: Manipulación algebraica

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{3}{2^j} = \sum_{j=0}^{n} 3 \cdot \left(\frac{1}{2^j}\right) = \sum_{j=0}^{n} 3 \left(\frac{1}{2}\right)^j$$

Serie conocida

$$= 3\left(\frac{1-a^{n+1}}{1-a}\right) = 3\left(\frac{1-(1/2)^{n+1}}{1-(1/2)}\right)$$

$$= 3\left(\frac{1}{1/2} - \frac{(1/2)^{n+1}}{(1/2)}\right) = \frac{3}{1/2} - 3(1/2)^{n+1-1}$$

$$= 6 - 3(1/2)^n = 6 - \frac{3}{2^n} = 6 - 3(2^{-n})$$