Nombre: Yope

Ejercicios de práctica:

1. Encuentra la distribución de probabilidad para 1 variable exponencial y la suma de 2, 3 y 4 variables exponenciales. Encuentra también la media y la varianza y la distribución de probabilidad acumulada.

Llena la siguiente tabla:

N	Media	Varianza	$fN(t)$	F. Acumulada
1	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$f_1(t) = \lambda e^{-\lambda t}$	$F_1(T) = 1 - e^{-\lambda T}$
2	$2/\lambda$	$2/\lambda^2$	$f_2(t) = \lambda^2 t e^{-\lambda t}$	$1 - e^{-\lambda T} - \lambda T e^{-\lambda T}$
3	$3/\lambda$	$3/\lambda^2$	$\lambda^3 t^2 e^{-\lambda t}/2$	$1 - e^{-\lambda T} - \lambda T e^{-\lambda T} - (\lambda T)^2 e^{-\lambda T}/2$
4	$4/\lambda$	$4/\lambda^2$	$\lambda^4 t^3 e^{-\lambda t}/6$	$1 - e^{-\lambda T} - \lambda T e^{-\lambda T} - \frac{(\lambda T)^2 e^{-\lambda T}}{2} - \frac{(\lambda T)^3 e^{-\lambda T}}{6}$

2. Se sabe que el tiempo de funcionamiento sin fallos para un componente que forma parte de un sistema, puede modelarse bien mediante una variable aleatoria que se distribuye exponencialmente, habiéndose establecido que el tiempo medio de funcionamiento sin fallos para este componente en 5 años. Se instalan cinco de estos componentes en un sistema.
   a. Calcula la probabilidad de que una componente funcione sin fallos más de 8 años.
   b. Calcula la probabilidad de que al menos dos de las componentes instaladas en el sistema superen los 8 años sin fallos.
3. En una carretera se han observado los intervalos entre el paso de dos vehículos sucesivos (en segundos), esta magnitud sigue un modelo gamma con $\alpha = 1$ y $\lambda = 20.5$. Calcula la probabilidad de que el tiempo transcurrido entre el paso de dos vehículos sea mayor de 28.9 segundos.
4. El tiempo de funcionamiento en años de un sistema de radar se modela como una distribución gamma con $\alpha = 2$ y $\lambda = 1.5$.
   a. Determina la probabilidad de que el sistema funcione al menos 1 año antes del fallo.
5. Se ha determinado que el tiempo de reparación en un taller de mantenimiento de computadoras sigue una distribución exponencial de media de 7 horas.
   a. ¿Con qué probabilidad una reparación supera las 10 horas?
   b. ¿Qué proporción de reparaciones tienen un tiempo de ejecución entre 8 y 16 horas?
6. Demuestre que la desviación estandar de una variable aleatorea con distribución Gamma es $\frac{\sqrt{\alpha}}{\lambda}$
7. Demuestra que el valor esperado de la siguiente distribución de probabilidad es 3.

$$f(t) = 3e^{-3t}$$

Ejercicios de práctica

La solución de estos ejercicios esta patrocinada por Julioprofe. Si tienes dudas o no recuerdas conceptos de cálculo integral ¡¡visítalo!

Para obtener la función de densidad de dos variables exponenciales hay que realizar una convolución, entonces:

$$f_2(t) = \int_0^t f_1(t) \cdot f_1(t_2 - t)\, dt$$

$$f_2(t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda t} \cdot \lambda e^{-\lambda(t_2 - t)}\, dt$$

$$= \int_0^t \lambda^2 e^{-\lambda t} e^{-\lambda t_2 + \lambda t}\, dt$$

$$= \lambda^2 \int_0^t \cancel{e^{-\lambda t}} e^{-\lambda t_2} \cancel{e^{\lambda t}}\, dt$$

$$= \lambda^2 e^{-\lambda t_2} \int_0^t dt$$

$$= \lambda^2 e^{-\lambda t_2}\, t \Big|_0^t$$

$$= \lambda^2 e^{-\lambda t_2}\, t - \phi$$

$$= \lambda^2 e^{-\lambda t_2}\, t$$

* Nota a la hora de pasarlo a la tabla podemos cambiar t_2 por t ya que es el mismo tiempo. Usamos t_2 para no revolver las variables.

Para el momento uno :

$$M_1 = \int_0^\infty t \cdot f_2(t) \cdot dt$$

$$= \int_0^\infty t \cdot \lambda^2 t e^{-\lambda t} dt$$

$$= \int_0^\infty \lambda^2 t^2 e^{-\lambda t} dt$$

Tabla

U	dV
t^2 +	$\lambda^2 e^{-\lambda t}$
$2t$ −	$-\lambda e^{-\lambda t}$
2 +	$e^{-\lambda t}$
ϕ	$-e^{-\lambda t}/\lambda$

$$M_1 = -t^2 \lambda e^{-\lambda t} - 2te^{-\lambda t} - \frac{2e^{-\lambda t}}{\lambda} \Big|_0^\infty$$

$$M_1 = -\phi - \phi - \phi + \phi + \phi + \frac{2}{\lambda}$$

$$M_1 = \frac{2}{\lambda}$$

Para la varianza usamos $M_2 - M_1^2$

$$M_2 = \int_0^\infty t^2 \cdot f_2(t)\, dt$$

$$M_2 = \int_0^\infty t^3 \lambda^2 e^{-\lambda t} dt$$

tabla

U	dV
t^3	$\lambda^2 e^{-\lambda t}$
$3t^2$	$-\lambda e^{-\lambda t}$
$6t$	$e^{-\lambda t}$
6	$-e^{-\lambda t}/\lambda$
ϕ	$e^{-\lambda t}/\lambda^2$

$$M_2 = -t^3 \lambda e^{-\lambda t} - 3t^2 e^{-\lambda t} - \frac{6te^{-\lambda t}}{\lambda} - \frac{6e^{-\lambda t}}{\lambda^2} \Big|_0^\infty$$

$$M_2 = -\phi - \phi - \phi - \phi + \phi + \phi + \phi + \frac{6}{\lambda^2}$$

$$M_2 = \frac{6}{\lambda^2}$$

$$VAR = \frac{6}{\lambda^2} - \left(\frac{2}{\lambda}\right)^2 = \frac{6}{\lambda^2} - \frac{4}{\lambda^2} = \underline{\underline{\frac{2}{\lambda^2}}}$$

Por último obtenemos la del acumulado de probabilidad.

$$F(T) = \int_0^T f(t)\, dt$$

$$F(T) = \int_0^T \lambda^2 t e^{-\lambda t}\, dt$$

Tabla

u	dv
t	$\lambda^2 e^{-\lambda t}$
1	$-\lambda e^{-\lambda t}$
$\emptyset$	$e^{-\lambda t}$

$$F(T) = -\lambda t e^{-\lambda t} - e^{-\lambda t} \Big|_0^T$$

$$F(T) = -\lambda T e^{-\lambda T} - e^{-\lambda T} + \emptyset + 1$$

$$F(T) = 1 - e^{-\lambda T} - \lambda T e^{-\lambda T}$$

Para Completar $N=3$ hay que hacer los mismos pasos. Aquí se dejan indicados los planteamientos y respuestas.

$$f_3(t) = \int_0^t f_2(t) \cdot f_1(t_2 - t)\, dt$$

$$f_3(t) = \int_0^t \lambda^2 t e^{-\lambda t} \cdot \lambda e^{-\lambda(t_2 - t)}\, dt$$

$$= \int_0^t \lambda^3 t e^{-\lambda t} e^{-\lambda(t_2 - t)}\, dt$$

$$= \frac{\lambda^3 t^2 e^{-\lambda t}}{2}$$

$$\mu_1 = \int_0^\infty t \cdot \frac{\lambda^3 t^2 e^{-\lambda t}}{2}\, dt$$

$$\mu_i = 3/\lambda$$

$$M_2 = \int_0^{\infty} t^2 \cdot \frac{\lambda^3 t^2 e^{-\lambda t}}{2}\, dt$$

$$M_2 = \frac{12}{\lambda^2}$$

$$VAR = \frac{3}{\lambda^2}$$

$$F(T) = \int_0^{T} \frac{\lambda^3 t^2 e^{-\lambda t}}{2}\, dt$$

$$F(T) = \int_0^{T} \frac{\lambda^3 t^2 e^{-\lambda t}}{2}\, dt = 1 - e^{-\lambda T} - \lambda T e^{-\lambda T} - \frac{(\lambda T)^2 e^{-\lambda T}}{2}$$

Para $N = 4$:

$$f_4(t) = \int_0^{t} f_3(t) \cdot f_1(t_2 - t)\, dt$$

$$= \int_0^{t} \frac{\lambda^3 t^2 e^{-\lambda t}}{2} \cdot \lambda e^{-\lambda(t_2 - t)}\, dt$$

$$= \frac{\lambda^4 t^3 e^{-\lambda t}}{6}$$

$$M_1 = \int_0^{\infty} t \cdot \frac{\lambda^4 t^3 e^{-\lambda t}}{6}\, dt$$

$$M_1 = 4/\lambda$$

$$M_2 = \int_0^{\infty} t^2 \cdot \frac{\lambda^4 t^5 e^{-\lambda t}}{6}\, dt$$

$M_2 = \frac{20}{\lambda^2}$

$VAR = 4/\lambda^2$

$$F(T) = \int_0^T \frac{\lambda^4 t^3 e^{-\lambda t}}{6}\, dt$$

$$F(T) = 1 - e^{-\lambda T} - \lambda T e^{-\lambda T} - \frac{(\lambda T)^2 e^{-\lambda T}}{2} - \frac{(\lambda T)^3 e^{-\lambda T}}{6}$$

2) a) T seria el func. en años. Si $\mu = 5$ entonces $\lambda = \frac{1}{5}$

T sigue una dist. exp. por lo tanto:

$\lambda e^{-\lambda t}$

me piden $\mathbb{P}[T > 8]$, entonces: Mayuscula

$$\mathbb{P}[T > 8] = 1 - \mathbb{P}[T \leq 8] = 1 - F(8)$$

$$= 1 - (1 - e^{-8/5})$$

$$= \underline{0.20189}$$

b) x seria tener fallo en 2 de las 5. Suena a binomial. Entonces:

$$\mathbb{P}[x \geq 2] = 1 - \mathbb{P}[x < 2] = 1 - \mathbb{P}[x = 0] - \mathbb{P}[x = 1]$$

$$\mathbb{P}[x = 0] = \binom{5}{0}(0.2018)^0(1 - 0.2018)^5$$

$$= 0.32381$$

$$\mathbb{P}[x = 1] = \binom{5}{1}(0.2018)^1(1 - 0.2018)^4$$

$$= 0.4095$$

$$\mathbb{P}[x \geq 2] = 1 - 0.3238 - 0.4095 = \underline{0.2666}$$

3) Sabemos que: $\alpha = 1$ y $\lambda = 20.5$

Utilizando gamma:

$$P[x > 28.9] = 1 - P[x \leq 28.9]$$

$$= 1 - \int_0^{28.9} \frac{(20.5)^1 x^{1-1} e^{-20.5x}}{\Gamma(1)} dx$$

$$= 1 - 20.5 \int_0^{28.9} e^{-20.5x} dx$$

$$= 1 - 20.5 \left(\frac{e^{-20.5x}}{-20.5} \right) \Big|_0^{28.9}$$

$$= 1 - \cancel{20.5} \left(\frac{-e^{-20.5(28.9)}}{\cancel{20.5}} + \frac{e^{-20.5(0)}}{\cancel{20.5}} \right)$$

$$= 1 - \left(-2.4574 \times 10^{-259} + 1 \right)$$

$$= 1 + 2.4574 \times 10^{-259} - 1$$

$$= 0.000000 \ldots 2 \approx \emptyset$$

4) Sabemos que: $\alpha = 2$ y $\lambda = 1.5$

a) $$P[x \geq 1] = 1 - \int_0^1 \frac{(1.5)^2 x^{2-1} e^{-1.5x}}{\Gamma(2)} dx$$

$$= 1 - \frac{(1.5)^2}{\Gamma(2)} \int_0^1 x e^{-1.5x} dx = \frac{(1.5)^2}{\Gamma(2)} \left(\frac{-x e^{-1.5x}}{1.5} - \frac{e^{-1.5x}}{(1.5)^2} \right) \Bigg|_0^1$$

$$= 1 + 1.5 e^{-1.5} + e^{-1.5} - \emptyset - 1$$

$$= 0.3346 + 0.2231$$

$$= 0.5577$$

⑤ Media de 7 horas con dist. exp. Entonces

$\lambda = \frac{1}{7}$

a) $\mathbb{P}[x > 10] = 1 - \mathbb{P}[X \leq 10]$

$= 1 - \int_0^{10} \frac{1}{7} e^{-1/7 x} \, dx$

$= 1 - \left(-e^{-1/7 x} \Big|_0^{10} \right)$

$= 1 - (-0.2396 + 1)$

$= \underline{0.2396}$

b) $\mathbb{P}[8 < x < 16] = F(16) - F(8)$

$= \left(1 - e^{-1/7(16)}\right) - \left(1 - e^{-1/7(8)}\right)$

$= -0.1017 + 0.3184$

$= \underline{0.2172}$

⑥ La desviación estándar de una variable es $\sqrt{VAR}$, la $VAR = M_2 - M_1^2$

Entonces:

* uso t para que no se confunda X con λ.

$$M_1 = \int_0^{\infty} t \cdot \frac{\lambda^{\alpha} t^{\alpha - 1} e^{-\lambda t}}{\Gamma(\alpha)} \, dt$$

$$M_1 = \int_0^{\infty} \frac{\lambda^{\alpha} t^{\alpha} e^{-\lambda t}}{\Gamma(\alpha)} \, dt$$

Por gammas

$$M_1 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} (\lambda t)^{\alpha} e^{-\lambda t} \, dt$$

$y = \lambda t$

$$M_1 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\lambda}\int_0^\infty y^\alpha e^{-y}\,dy$$

$$M_1 = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)\lambda} = \frac{\alpha\cancel{\Gamma(\alpha)}}{\cancel{\Gamma(\alpha)}\lambda} = \frac{\alpha}{\lambda}$$

$$M_2 = \int_0^\infty t^2 \cdot \frac{\lambda^\alpha t^{\alpha-1} e^{-\lambda t}}{\Gamma(\alpha)}\,dt$$

$$M_2 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty \lambda^\alpha t^{\alpha+1} e^{-\lambda t}\,dt$$

$$M_2 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\lambda}\int \lambda^{\alpha+1} t^{\alpha+1} e^{-\lambda t}\,dt \qquad y = \lambda t$$

$$M_2 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\lambda^2}\int y^{\alpha+1} e^{-y}\,dy$$

$$M_2 = \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\alpha)\lambda^2} = \frac{(\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)\lambda^2} = \frac{(\alpha+1)\alpha\cancel{\Gamma(\alpha)}}{\cancel{\Gamma(\alpha)}\lambda^2} = \frac{(\alpha+1)\alpha}{\lambda^2}$$

$$VAR = \frac{(\alpha+1)\alpha}{\lambda^2} - \frac{\alpha^2}{\lambda^2} = \frac{\alpha^2+\alpha-\alpha^2}{\lambda^2} = \frac{\alpha}{\lambda^2}$$

$$\sigma = \frac{\sqrt{\alpha}}{\lambda}$$

7) Usando el momento 1:

Tablita

u	dv
t	$3e^{-3t}$
1	$-e^{-3t}$
$\emptyset$	$+e^{-3t}/3$

$$M_1 = \int_0^\infty t \cdot 3e^{-3t}\,dt$$

$$M_1 = -te^{-3t} - \frac{e^{-3t}}{3}\Big|_0^\infty = -\emptyset - \emptyset + \emptyset + \frac{1}{3}$$

$$\mu_1 = \frac{1}{3}$$

Por lo que concluimos que el valor esperado de esta dist es $\frac{1}{3}$ No 3.